А.А. Меленцов

О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ЕДИНИЧНОМ ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ КУБЕ[2]

В опубликованных ранее работах рассматривалась задача приближения функций двух переменных Соболевского класса

$$f(x) = f(x_1, x_2) \in W_p^2[I^2],$$

где $1 \le p \le \infty$; α - натуральное число; $x = (x_1, x_2)$.

Большую роль в этом исследовании сыграла лемма 1.1 [1, § 1] о представлении кусочно-полиномиальных функций в виде билинейной функции с минимальным числом слагаемых.

Если продолжать начатые в работе [1] исследования для функции Соболевского класса $W_p^\alpha[I^n]$ n переменных, то представляется важным исследовать вопрос о возможных представлениях кусочно-полиномиальных функций, заданных на n-мерном единичном кубе. Случай $n = 2$ был рассмотрен в работе [1, §1], случай $n = 3$ в работе [2]. Данная работа рассматривает задачу о возможных представлениях кусочно-полиномиальных функций, заданных на четырехмерном кубе.

Пусть $I^4 = [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$, $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in I^4$. Введем разбиение отрезка $[0,1]$ на оси Ox_4 точками

$$0 = x_4^{0_4} < x_4^{1_4} < \ldots < x_4^{i_4} < \ldots < x_4^{N_4} = 1,$$

$$\Delta x_4^{1_4} = [x_4^{0_4}; x_4^{1_4}],$$

$$\Delta x_4^{i_4} = (x_4^{i_4-1}; x_4^{i_4}] \quad (i_4 = 2_4, 3_4, \ldots, N_4),$$

$$|\Delta x^{i_4}| = x_4^{i_4} - x_4^{i_4-1} \quad (i_4 = 1_4, 2_4, 3_4 \ldots, N_4).$$

Пусть

$$\Pi_{i_4} = \{x \mid x_4 \in \Delta x_4^{i_4}, x_3 \in [0,1], x_2 \in [0,1], x_1 \in [0,1]\}.$$

Для каждого Π_{i_4} введем свое разбиение отрезка $[0,1]$ на оси Ox_3 точками

$$0 = x_3^{0_3 i_4} < x_3^{1_3 i_4} < \ldots < x_3^{i_3 i_4} < \ldots < x_3^{N_3 i_4} = 1.$$

Пусть

$$\Delta x_3^{1_3 i_4} = [x_3^{0_3}, x_3^{1_3 i_4}],$$

[2] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 09-01-00014-а

$$\Delta x_3^{i_3 i_4} = (x_3^{(i_3-1)i_4}, x_3^{i_3 i_4}] \quad (i_3 = 2_3, \ldots, N_3 i_4),$$

$$| \Delta x_3^{i_3 i_4} | = (x_3^{i_3 i_4} - x_3^{(i_3-1)i_4}] \quad (i_3 = 1_3, 2_3, \ldots, N_3 i_4).$$

Пусть

$$\Pi_{i_3 i_4} = \{x \mid x_4 \in \Delta x_4^{i_4},\, x_3 \in \Delta x_3^{i_3 i_4},\, x_2 \in [0,1],\, x_1 \in [0,1]\}.$$

Для каждого $\Pi_{i_3 i_4}$ введем свое разбиение отрезка $[0,1]$ по оси Ox_2 точками

$$0 = x_2^{0_2 i_3 i_4} < x_2^{1_2 i_3 i_4} < \ldots < x_2^{i_2 i_3 i_4} < \ldots < x_2^{N_2 i_3 i_4} = 1,$$

$$\Delta x_2^{1_2 i_3 i_4} = [x_2^{0_2 i_3 i_4}, x_2^{1_2 i_3 i_4}],$$

$$\Delta x_2^{i_2 i_3 i_4} = (x_2^{(i_2-1) i_3 i_4}; x_2^{i_2 i_3 i_4}] \quad (i_2 = 2_2, 3_2, \ldots, N_{2 i_3 i_4}),$$

$$| \Delta x_2^{i_2 i_3 i_4} | = x_2^{i_2 i_3 i_4} - x_2^{(i_2-1) i_3 i_4} \quad (i_2 = 1_2, 2_2, \ldots, N_{2 i_3 i_4}).$$

Пусть

$$\Pi_{i_2 i_3 i_4} = \{x \mid x_4 \in \Delta x_4^{i_4},\, x_3 \in \Delta x_3^{i_3 i_4},\, x_2 \in \Delta x_2^{i_2 i_3 i_4},\, x_1 \in [0,1]\}.$$

Для каждого $\Pi_{i_2 i_3 i_4}$ введем свое разбиение отрезка $[0,1]$ по оси Ox_1 точками

$$0 = x_1^{0_1 i_2 i_3 i_4} < x_1^{1_1 i_2 i_3 i_4} < \ldots < x_1^{N_1 i_2 i_3 i_4} = 1,$$

$$\Delta x_1^{1_1 i_2 i_3 i_4} = [x_1^{0_1 i_2 i_3 i_4}; x_1^{1_2 i_2 i_3 i_4}] \quad (i_1 = 2, 3, \ldots, N_{1 i_2 i_3 i_4}),$$

$$\Delta x_1^{i_1 i_2 i_3 i_4} = (x_1^{(i_1-1) i_2 i_3 i_4}; x_1^{i_1 i_2 i_3 i_4}] \quad (i_1 = 2, 3, \ldots, N_{1 i_2 i_3 i_4}),$$

$$| \Delta x_1^{i_1 i_2 i_3 i_4} | = x_1^{i_1 i_2 i_3 i_4} - x_1^{(i-1) i_2 i_3 i_4} \quad (i_1 = 1, 2, \ldots, N_{1 i_2 i_3 i_4}).$$

Пусть

$$\Pi_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \{x \mid x_4 \in \Delta x_4^{i_4},\, x_3 \in \Delta x_3^{i_3 i_4},\, x_2 \in \Delta x_2^{i_2 i_3 i_4},\, x_1 \in \Delta x_1^{i_1 i_2 i_3 i_4}\}.$$

Множество $\Pi_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ будем называть элементарной ячейкой

$$\Pi_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \Delta x_1^{i_1 i_2 i_3 i_4} \times \Delta x_2^{i_2 i_3 i_4} \times \Delta x_3^{i_3 i_4} \times \Delta x_4^{i_4}.$$

Очевидно, что

$$\bigcup_{i_4=1}^{N_4} \bigcup_{i_3=1}^{N_{3 i_4}} \bigcup_{i_2=1}^{N_{2 i_3 i_4}} \bigcup_{i_1=1}^{N_{1 i_2 i_3 i_4}} \Pi_{i_1 i_2 i_3 i_4} = I^4$$

и

$$\Pi_{i_1 i_2 i_3 i_4} \cap \Pi_{i'_1 i'_2 i'_3 i'_4} \neq \varnothing$$

тогда и только тогда, когда $\forall s\ (s = 1,2,3,4)$ выполняется $i_s = i'_s$. Проделанное разбиение I^4 на элементарные четырехмерные ячейки $\Pi_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ назовем разбиением

$$R_K^{N_4 N_{3 i_4} N_{2 i_3 i_4} N_{1 i_2 i_3 i_4}},$$

где

$$K=\sum_{i_4=1}^{N_4}\sum_{i_3=1}^{N_{3i_4}}\sum_{i_2=1}^{N_{2i_3i_4}} N_{1i_2i_3i_4}\ .$$

На каждой элементарной ячейке $\Pi_{i_1i_2i_3i_4}$ зададим многочлен степени l по совокупности переменных x_1,x_2,x_3,x_4 с мультииндексом $\tau = (\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4)$

$$P_{i_1i_2i_3i_4}(x)=\sum_{0\le|\tau|\le l} C^{i_1i_2i_3i_4}_{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4} x_1^{\tau_1}x_2^{\tau_2}x_3^{\tau_3}x_4^{\tau_4}\,, \tag{1}$$

где $|\tau|=\tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4$.

Рассмотрим характеристическую функцию

$$\chi_{\Pi_{i_1i_2i_3i_4}}(x)=\begin{cases}1, & x\in\Pi_{i_1i_2i_3i_4}\\ 0, & x\notin\Pi_{i_1i_2i_3i_4}\end{cases}$$

и характеристические функции

$$\chi_{\Delta x_4^{i_4}}(x_4)=\begin{cases}1, & x\in\Delta x_4^{i_4}\\ 0, & x\notin\Delta x_4^{i_4}\end{cases},$$

$$\chi_{\Delta x_3^{i_3i_4}}(x_3)=\begin{cases}1, & x_3\in\Delta x_3^{i_3i_4}\\ 0, & x_3\notin\Delta x_3^{i_3i_4}\end{cases},$$

$$\chi_{\Delta x_2^{i_2i_3i_4}}(x_2)=\begin{cases}1, & x_2\in\Delta x_2^{i_2i_3i_4}\\ 0, & x_2\notin\Delta x_2^{i_2i_3i_4}\end{cases},$$

$$\chi_{\Delta x_1^{i_1i_2i_3i_4}}(x_1)=\begin{cases}1, & x_1\in\Delta x_1^{i_1i_2i_3i_4}\\ 0, & x_1\notin\Delta x_1^{i_1i_2i_3i_4}\end{cases}.$$

Очевидно, что

$$\chi_{\Pi_{i_1i_2i_3i_4}}(x)=\chi_{\Delta x_4^{i_4}}(x_4)\cdot\chi_{\Delta x_3^{i_3i_4}}(x_3)\cdot\chi_{\Delta x_2^{i_2i_3i_4}}(x_2)\cdot\chi_{\Delta x_1^{i_1i_2i_3i_4}}(x_1)\,.$$

Рассмотрим кусочно-полиномиальную функцию, заданную на I^4 и связанную с разбиением $R_k^{N_4N_{3i_4}N_{2i_3i_4}N_{1i_2i_3i_4}}$

$$T_k(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_{i_4=1}^{N_4}\sum_{i_3=1}^{N_{3i_4}}\sum_{i_2=1}^{N_{2i_3i_4}}\sum_{i_1=1}^{N_{1i_2i_3i_4}}\chi_{\Pi_{i_1i_2i_3i_4}}(x)\sum_{0\le|\tau|\le l}C^{i_1i_2i_3i_4}_{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4}x_1^{\tau_1}x_2^{\tau_2}x_3^{\tau_3}x_4^{\tau_4}=$$

$$=\sum_{i_4=1}^{N_4}\sum_{i_3=1}^{N_{3i_4}}\sum_{i_2=1}^{N_{2i_3i_4}}\sum_{i_1=1}^{N_{1i_2i_3i_4}}\chi_{\Delta x_4^{i_4}}(x_4)\chi_{\Delta x_3^{i_3i_4}}(x_3)\chi_{\Delta x_2^{i_2i_3i_4}}(x_2)\chi_{\Delta x_1^{i_1i_2i_3i_4}}(x_1)\sum_{\tau_4=0}^{l}x_4^{\tau_4}\sum_{0\le\tau_1+\tau_2+\tau_3\le l-\tau_4}C^{i_1i_2i_3i_4}_{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4}x_1^{\tau_1}x_2^{\tau_2}x_3^{\tau_3}=$$

$$=\sum_{i_4=1}^{N_4}\chi_{\Delta x_4^{i_4}}(x_4)\sum_{\tau_4=0}^{l}x_4^{\tau_4}\left[\sum_{i_3=1}^{N_{3i_4}}\sum_{i_2=1}^{N_{2i_3i_4}}\sum_{i_1=1}^{N_{1i_2i_3i_4}}\chi_{\Delta x_3^{i_3i_4}}(x_3)\chi_{\Delta x_2^{i_2i_3i_4}}(x_2)\chi_{\Delta x_1^{i_1i_2i_3i_4}}(x_1)\sum_{0\le\tau_1+\tau_2+\tau_3\le l-\tau_4}C^{i_1i_2i_3i_4}_{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4}x_1^{\tau_1}x_2^{\tau_2}x_3^{\tau_3}\right]=$$

$$=\sum_{i_4=1}^{N_4}\sum_{\tau_4=0}^{l}\chi_{\Delta x_4^{i_4}}(x_4)x_4^{\tau_4}\left[\sum_{i_3=1}^{N_{3i_4}}\sum_{i_2=1}^{N_{2i_3i_4}}\sum_{i_1=1}^{N_{1i_2i_3i_4}}\chi_{\Delta x_3^{i_3i_4}}(x_3)\chi_{\Delta x_2^{i_2i_3i_4}}(x_2)\chi_{\Delta x_1^{i_1i_2i_3i_4}}(x_1)\sum_{0\le\tau_1+\tau_2+\tau_3\le l-\tau_4}C_{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4}^{i_1i_2i_3i_4}x_1^{\tau_1}x_2^{\tau_2}x_3^{\tau_3}\right]. \tag{2}$$

Обозначим

$$\varphi_{\tau_4,i_4}(x_4)=\chi_{\Delta x_4^{i_4}}(x_4)x_4^{\tau_4},$$

$$\psi_{\tau_4,i_4}(x_1,x_2,x_3)=\left[\sum_{i_3=1}^{N_{3i_4}}\sum_{i_2=1}^{N_{2i_3i_4}}\sum_{i_1=1}^{N_{1i_2i_3i_4}}\chi_{\Delta x_3^{i_3i_4}}(x_3)\chi_{\Delta x_2^{i_2i_3i_4}}(x_2)\chi_{\Delta x_1^{i_1i_2i_3i_4}}(x_1)\sum_{0\le\tau_1+\tau_2+\tau_3\le l-\tau_4}C_{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4}^{i_1i_2i_3i_4}x_1^{\tau_1}x_2^{\tau_2}x_3^{\tau_3}\right].$$

Тогда (2) примет вид

$$T_k(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_{i_4=1}^{N_4}\sum_{\tau_4=0}^{l}\varphi_{\tau_4,i_4}(x_4)\psi_{\tau_4,i_4}(x_1,x_2,x_3), \tag{3}$$

где число слагаемых $M=N_4(l+1)$. Если положить $y=(x_1,x_2,x_3)$ и подставить x и y в (3), то $T_k(x_1,x_2,x_3,x_4)$ примет вид билинейной функции

$$T_k(x_1,x_2,x_3,x_4)=g_M(x_4,y)=\sum_{s=1}^{M}\varphi_s(x_4)\psi_s(y), \tag{3.1}$$

принадлежащей классу билинейных функций G_M, где $M=N_4(l+1)$. Очевидно, что функцию $\psi_{\tau_4,i_4}(x_1,x_2,x_3)$ можно рассматривать как кусочно-полиномиальную функцию, заданную на единичном трехмерном кубе I^3.

Преобразуем ее таким образом, чтобы можно было затем воспользоваться результатами, полученными в работе [1, лемма 1.1] (См. рисунок).

$$\psi_{\tau_4,i_4}(x_1,x_2,x_3)=\left[\sum_{i_3=1}^{N_{3i_4}}\sum_{i_2=1}^{N_{2i_3i_4}}\sum_{i_1=1}^{N_{1i_2i_3i_4}}\chi_{\Delta x_3^{i_3i_4}}(x_3)\chi_{\Delta x_2^{i_2i_3i_4}}(x_2)\chi_{\Delta x_1^{i_1i_2i_3i_4}}(x_1)\sum_{0\le\tau_1+\tau_2+\tau_3\le l-\tau_4}C_{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4}^{i_1i_2i_3i_4}x_1^{\tau_1}x_2^{\tau_2}x_3^{\tau_3}\right]=$$

$$=\sum_{i_3=1}^{N_{3i_4}}\sum_{i_2=1}^{N_{2i_3i_4}}\sum_{i_1=1}^{N_{1i_2i_3i_4}}\chi_{\Delta x_3^{i_3i_4}}(x_3)\chi_{\Delta x_2^{i_2i_3i_4}}(x_2)\chi_{\Delta x_1^{i_1i_2i_3i_4}}(x_1)\sum_{\tau_3=0}^{l-\tau_4}x_3^{\tau_3}\sum_{0\le\tau_1+\tau_2\le l-\tau_4-\tau_3}C_{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4}^{i_1i_2i_3i_4}x_1^{\tau_1}x_2^{\tau_2}=$$

$$=\sum_{i_3=1}^{N_{3i_4}}\sum_{\tau_3=0}^{l-\tau_4}\chi_{\Delta x_3}^{i_3i_4}(x_3)x_3^{\tau_3}\left[\sum_{i_2=1}^{N_{2i_3i_4}}\sum_{i_1=1}^{N_{1i_2i_3i_4}}\chi_{\Delta x_2^{i_2i_3i_4}}(x_2)\chi_{\Delta x_1^{i_1i_2i_3i_4}}(x_1)\sum_{0\le\tau_1+\tau_2\le l-\tau_4-\tau_3}C_{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4}^{i_1i_2i_3i_4}x_1^{\tau_1}x_2^{\tau_2}\right]. \tag{4}$$

Обозначим

$$f_{1i_3i_4\tau_3}(x_3)=\chi_{\Delta x_3^{i_3i_4}}(x_3)x_3^{\tau_3},$$

$$f_{2i_3i_4\tau_3\tau_4}(x_1,x_2)=\left[\sum_{i_2=1}^{N_{2i_3i_4}}\sum_{i_1=1}^{N_{1i_2i_3i_4}}\chi_{\Delta x_2^{i_2i_3i_4}}(x_2)\chi_{\Delta x_1^{i_1i_2i_3i_4}}(x_1)\sum_{0\le\tau_1+\tau_2\le l-\tau_4-\tau_3}C_{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4}^{i_1i_2i_3i_4}x_1^{\tau_1}x_2^{\tau_2}\right].$$

Подставим введенные обозначения в (4) и затем в (3) получаем

$$T_k(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_{i_4=1}^{N_4}\sum_{\tau_4=0}^{l}\chi_{\Delta x_4^{i_4}}(x_4)x_4^{\tau_4}\sum_{i_3=1}^{N_{3i_4}}\sum_{\tau_3=0}^{l-\tau_4}\chi_{\Delta x_3}^{i_3i_4}(x_3)x_3^{\tau_3}\left[f_{2i_3i_4\tau_3\tau_4}(x_1,x_2)\right]=$$

$$=\sum_{i_4=1}^{N_4}\sum_{\tau_4=0}^{l}\sum_{i_3=1}^{N_{3i_4}}\sum_{\tau_3=0}^{l-\tau_4}\chi_{\Delta x_4^{i_4}}(x_4)\chi_{\Delta x_3^{i_3i_4}}(x_3)x_4^{\tau_4}x_3^{\tau_3}f_{2i_3i_4\tau_3\tau_4}(x_1,x_2)\,. \qquad (5)$$

Введенные обозначения позволяют представить

$$T_k(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_{i_4=1}^{N_4}\sum_{i_3=1}^{N_{3i_4}}\sum_{\tau_4=0}^{l}\sum_{\tau_3=0}^{l-\tau_4}\varphi_{\tau_4i_4}(x_4)f_{1i_3i_4\tau_3}(x_3)f_{2i_3i_4\tau_3\tau_4}(x_1,x_2)\,. \qquad (6)$$

Число слагаемых в этой сумме равно

$$M=\left(\sum_{i_4=1}^{N_4}N_{3i_4}\right)\frac{(l+2)(l+1)}{2}\,.$$

Обозначим

$$f_{3i_3i_4\tau_3\tau_4}(x_3,x_4)=\chi_{\Delta x_4^{i}}(x_4)\chi_{\Delta x_3^{i_3i_4}}(x_3)x_4^{\tau_4}x_3^{\tau_3}\,.$$

Подставляя введенное обозначение в (5), получим

$$T_k(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_{i_4=1}^{N_4}\sum_{i_3=1}^{N_{3i_4}}\sum_{\tau_4=0}^{l}\sum_{\tau_3=0}^{l-\tau_4}f_{3i_3i_4\tau_3\tau_4}(x_3,x_4)f_{2i_3i_4\tau_3\tau_4}(x_1,x_2)\,. \qquad (7)$$

Число слагаемых в этой сумме $M=\left(\sum_{i_4=1}^{N_4}N_{3i_4}\right)\frac{(l+2)(l+1)}{2}$.

Функция $f_{2i_3i_4\tau_3\tau_4}(x_1,x_2)$ представляет собой кусочно-полиномиальную функцию, заданную на $I^2=[0,1]\times[0,1]$. В работе [1, § 1] в лемме 1.1 было рассмотрено представление такой функции как билинейной функции вида

$$g_M(x_1,x_2)=\sum_{s=1}^{M}\varphi_s(x_1)\psi_s(x_2)\,, \qquad (8)$$

где $M=N(l+1)$, N - в данном случае число полос при разбиении единичного квадрата I^2 по оси Ox_2, l - степень полинома по совокупности переменных.

В нашем случае число полос при разбиении по оси Ox_2 $N=N_{2i_3i_4}$, а степень полинома по совокупности переменных зависит от τ_3 и τ_4 и равна $l-\tau_4-\tau_3$. Представим функцию $f_{2i_3i_4\tau_3\tau_4}(x_1,x_2)$ в виде билинейной функции вида (8)

$$f_{2i_3i_4\tau_3\tau_4}(x_1,x_2)=\left[\sum_{i_2=1}^{N_{2i_3i_4}}\sum_{i_1=1}^{N_{1i_2i_3i_4}}\chi_{\Delta x_2^{i_2i_3i_4}}(x_2)\chi_{\Delta x_1^{i_1i_2i_3i_4}}(x_1)\sum_{0\le\tau_1+\tau_2\le l-\tau_4-\tau_3}C_{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4}^{i_1i_2i_3i_4}x_1^{\tau_1}x_2^{\tau_2}\right]=$$

$$=\left[\sum_{i_2=1}^{N_{2i_3i_4}}\sum_{i_1=1}^{N_{1i_2i_3i_4}}\chi_{\Delta x_2^{i_2i_3i_4}}(x_2)\chi_{\Delta x_1^{i_1i_2i_3i_4}}(x_1)\sum_{\tau_2=0}^{l-\tau_4-\tau_3}x_2^{\tau_2}\sum_{\tau_1=0}^{l-\tau_4-\tau_3-\tau_2}C_{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4}^{i_1i_2i_3i_4}x_1^{\tau_1}\right]=$$

$$=\left[\sum_{i_2=1}^{N_{2i_3i_4}} \chi_{\Delta x_2^{i_2i_3i_4}}(x_2) \sum_{\tau_2=0}^{l-\tau_4-\tau_3} x_2^{\tau_2}\left(\sum_{i_1=1}^{N_{1i_2i_3i_4}} \chi_{\Delta x_1^{i_1i_2i_3i_4}}(x_1) \sum_{\tau_1=0}^{l-\tau_4-\tau_3-\tau_2} C_{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4}^{i_1i_2i_3i_4} x_1^{\tau_1}\right)\right]=$$

$$=\sum_{i_2=1}^{N_{2i_3i_4}} \sum_{\tau_2=0}^{l-\tau_4-\tau_3} \chi_{\Delta x_2^{i_2i_3i_4}}(x_2) x_2^{\tau_2} \sum_{i_1=1}^{N_{1i_2i_3i_4}} \sum_{\tau_1=0}^{l-\tau_4-\tau_3-\tau_2} \chi_{\Delta x_1^{i_1i_2i_3i_4}}(x_1) C_{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4}^{i_1i_2i_3i_4} x_1^{\tau_1}.$$

Обозначим

$$f_{4i_3i_4\tau_3\tau_4}(x_2)=\chi_{\Delta x_2^{i_2i_3i_4}}(x_2)x_2^{\tau_2},$$

$$f_{5i_2i_3i_4\tau_2\tau_3\tau_4}(x_1)=\sum_{i_1=1}^{N_{1i_2i_3i_4}} \sum_{\tau_1=0}^{l-\tau_4-\tau_3-\tau_2} \chi_{\Delta x_1^{i_1i_2i_3i_4}}(x_1) C_{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4}^{i_1i_2i_3i_4} x_1^{\tau_1}.$$

После чего $f_{2i_3i_4\tau_3\tau_4}(x_1,x_2)$ можно записать как билинейную функцию вида (8) с минимальным числом слагаемых

$$f_{2i_3i_4\tau_3\tau_4}(x_1,x_2)=\sum_{i_2=1}^{N_{2i_3i_4}} \sum_{\tau_2=0}^{l-\tau_4-\tau_3} f_{4i_3i_4\tau_3\tau_4}(x_2) f_{5i_2i_3i_4\tau_2\tau_3\tau_4}(x_1). \qquad (9)$$

Число слагаемых в этой сумме равно $N_{2i_3i_4}(l-\tau_4-\tau_3+1)$. Подставляя (9) в (6), получим

$$T_k(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_{i_4=1}^{N_4}\sum_{i_3=1}^{N_{3i_4}}\sum_{\tau_4=0}^{l}\sum_{\tau_3=0}^{l-\tau_4}\varphi_{\tau_4i_4}(x_4) f_{1i_3i_4\tau_3}(x_3)\sum_{i_2=1}^{N_{2i_3i_4}}\sum_{\tau_2=0}^{l-\tau_4-\tau_3} f_{i_3i_4\tau_3\tau_4}(x_2) f_{i_2i_3i_4\tau_2\tau_3\tau_4}(x_1)=$$

$$=\sum_{i_4=1}^{N_4}\sum_{i_3=1}^{N_{3i_4}}\sum_{i_2=1}^{N_{2i_3i_4}}\sum_{\tau_4=0}^{l}\sum_{\tau_3=0}^{l-\tau_4}\sum_{\tau_2=0}^{l-\tau_4-\tau_3}\varphi_{\tau_4i_4}(x_4) f_{1i_3i_4\tau_3}(x_3) f_{4i_3i_4\tau_3\tau_4}(x_2) f_{5i_2i_3i_4\tau_2\tau_3\tau_4}(x_1). \qquad (10)$$

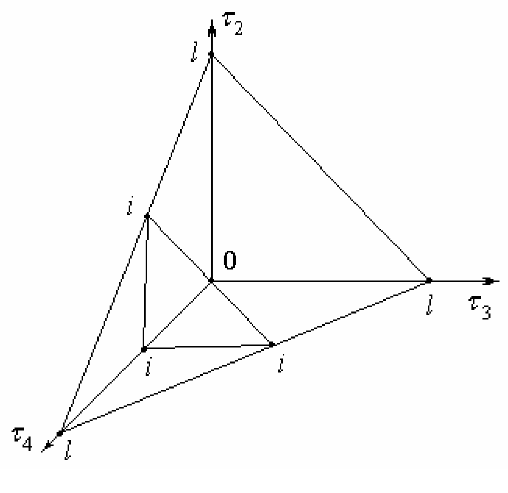

Рисунок. Геометрическая интерпретация результатов

Число слагаемых в сумме $\sum_{\tau_4=0}^{l}\sum_{\tau_3=0}^{l-\tau_4}\sum_{\tau_2=0}^{l-\tau_4-\tau_3}$ равно

$$M_1=\frac{(l+1)(l+2)}{2}+\frac{l(l+1)}{2}+\dots+\frac{1\cdot 2}{2}=\frac{1}{2}[1\cdot 2+2\cdot 3+\dots+(l+1)(l+2)]=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{l+1}s(s+1)=\frac{1}{2}\left[\sum_{s=1}^{l+1}s^2+\sum_{s=1}^{l+1}s\right].$$

Используя известные формулы

$$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2},$$

далее получаем

$$M_1=\left[\sum_{s=1}^{l+1}s^2+\sum_{s=1}^{l+1}s\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{(l+1)(l+2)(2l+3)}{6}+\frac{(l+1)(l+2)}{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(l+1)(l+2)}{2}\left[\frac{2l+3}{3}+1\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{(l+1)(l+2)}{2}\cdot\frac{(2l+6)}{3}=$$

$$=\frac{(l+1)(l+2)(l+3)}{6}=\frac{(l+1)(l+2)((l+3)}{3!}.$$

Следовательно, общее число слагаемых в сумме (10) равно

$$M=\left(\sum_{i_4=1}^{N_4}\sum_{i_3=1}^{N_{3i_4}}N_{2i_3i_4}\right)\frac{(l+1)(l+2)(l+3)}{3!}.$$

Отметим, что M не зависит от частоты разбиений по переменной x_1. Сумма (10) может быть представлена в виде

$$T_k(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_{s=1}^{M}\varphi_s(x_4)f_{1s}(x_3)f_s(x_2)f_s(x_1). \qquad (11)$$

По аналогии с билинейной функцией и трехлинейной, полученное представление $T_k(x)$ естественно назвать четырехлинейной функцией. Если (9) подставить в (7), то получим

$$T_k(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_{i_4=1}^{N_4}\sum_{i_3=1}^{N_{3i_4}}\sum_{i_2=1}^{N_{2i_3i_4}}\sum_{\tau_4=0}^{l}\sum_{\tau_3=0}^{l-\tau_4}\sum_{\tau_2=0}^{l-\tau_4-\tau_3}f_{3i_3i_4\tau_3\tau_4}(x_3,x_4)f_{4i_3i_4\tau_3\tau_4}(x_2)f_{5i_2i_3i_4\tau_2\tau_3\tau_4}(x_1) \qquad (12)$$

Очевидно, что число слагаемых в этой сумме будет таким же, что и в сумме (11).

Подводя итог, можно сформулировать следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть* $R_K^{N_4N_{3i_4}N_{2i_3i_4}N_{1i_2i_3i_4}}$ *- разбиение четырехмерного единичного куба* I^4 *на* K *элементарных четырехмерных ячеек* $\Pi_{i_1i_2i_3i_4}$*, получаемых вначале разбиением куба* I^4 *на оси* Ox_4 *на* N_4 *четырехмерных слоя* Π_{i_4} *и затем каждого слоя* Π_{i_4} *индивидуально по оси* Ox_3 *на* N_{i_4} *ячеек* $\Pi_{i_3i_4}$*, затем разбиением каждой из полученных ячеек* $\Pi_{i_3i_4}$ *индивидуально по* Ox_2 *на* $N_{i_3i_4}$ *ячеек* $\Pi_{i_2i_3i_4}$ *и, наконец, каждую из ячеек* $\Pi_{i_2i_3i_4}$ *по-своему разбиваем по оси* Ox_1 *на* $N_{i_2i_3i_4}$

элементарных ячеек $\Pi_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ *, общее число которых равно* K. *Пусть* $T_K(x)$ *- кусочно-полиномиальная функция, заданная на разбиении* $R_K^{N_4 N_{3i_4} N_{2i_3i_4} N_{1i_2i_3i_4}}$ *и на каждой элементарной ячейке* $\Pi_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ *совпадающая с некоторым многочленом* $P_{i_1 i_2 i_3 i_4}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ *степени* $l = \alpha - 1$ *по совокупности переменных. Тогда* $T_K(x_1, x_2, x_3, x_4)$ *можно представить как*

- *билинейную функцию класса* G_M *вида*

$$T_K(x) = g_M(x_4, y) = \sum_{s=1}^{M} \varphi_s(x_4) \psi(y), \tag{13}$$

где $y = (x_1, x_2, x_3)$ и $M = N_4(l+1)$ (*см.* (3), (3.1));

- *билинейную функцию класса* G_M *вида*

$$T_K(x) = g_M(z_1, z_2) = \sum_{s=1}^{M} f_{3s}(z_1) f_{2s}(z_2), \tag{14}$$

где $z_1 = (x_3, x_4)$, $z_2 = (x_1, x_2)$ *и*

$$M = \left(\sum_{i_4=1}^{N_4} N_{3i_4} \right) \frac{(l+1)(l+2)}{2!} \qquad (\textit{см. } (6));$$

- *трилинейную функцию класса* G_M *вида*

$$T_K(x) = \sum_{s=1}^{M} \varphi_s(x_4) f_{1s}(x_3) f_{2s}(z_2), \tag{15}$$

где $z_2 = (x_1, x_2)$ *и*

$$M = \left(\sum_{i_4=1}^{N_4} N_{3i_4} \right) \frac{(l+1)(l+2)}{2!};$$

- *трилинейную функцию класса* G_M *вида*

$$T_K(x) = \sum_{s=1}^{M} \varphi_s(z_1) f_{4s}(x_2) f_{5s}(x_1), \tag{16}$$

где $z_1 = (x_3, x_4)$ *и*

$$M = \left(\sum_{i_4=1}^{N_4} \sum_{i_3=1}^{N_{3i_4}} N_{2i_3i_4} \right) \frac{(l+1)(l+2)(l+3)}{3!} \qquad (\textit{см. } (12));$$

- *четырехлинейную функцию класса* G_M *вида*

$$T_K(x) = \sum_{s=1}^{M} \varphi_s(x_4) f_{1s}(x_3) f_{4s}(x_2) f_{5s}(x_1), \tag{17}$$

где

$$M = \left(\sum_{i_4=1}^{N_4} \sum_{i_3=1}^{N_{3i_4}} N_{2i_3i_4} \right) \frac{(l+1)(l+2)(l+3)}{3!} \qquad (\textit{см. } (11)).$$

Автор благодарит д.ф.-м.н., профессора Черных Н.И. за полезные замечания.

Библиографический список

1. *Меленцов А.А.* Приближения функций класса $W_p^{\alpha}([0,1]^2)$ билинейными функциями // Изв. Уральского университета. 2004. № 30. Математика и механика. Вып.6. С.90 – 116.
2. *Меленцов А.А.* О представлениях кусочно-полиномиальных функций, заданных на единичных квадрате и кубе[3] // Проблемы электроэнергетики, информатики и образования. Вып.2. Изд. РГППУ. Екатеринбург, 2010. С. 38 -46.

О.И. Клюшников, А.В. Степанов, М.Г. Нечаева

РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ К УРАВНЕНИЯМ СВЯЗИ

Переход от измеренной интенсивности аналитической линии к содержанию определяемого элемента – этап , завершающий процесс рентгеноэлектронного анализа. Его основная задача – обеспечить получение правильного значения концентрации элемента в анализируемом материале. Эту задачу решают различными путями в зависимости от типа и сложности химического состава пробы, а также требований, предъявляемых к воспроизводимости и правильности результатов анализа.

При выборе методик количественного анализа исходят из возможности получения допустимого значения величины доверительного интервала результата измерения исследуемой величины.

Многочисленные экспериментальные данные разных авторов показали тот факт, что отношение $(\frac{I_i}{C_i})$,величины интенсивности I_i к концентрации элемента в образце C_i , которое изменяется в диапазоне C_i от 0 до 1, остается практически постоянным.

Это позволило некоторым авторам, [1÷ 3] , предложить идею определения концентраций из первых принципов. Идея состоит в линейной интерполяции интенсивности сигнала I_A элемента A в твердом теле, по отношению к мо-

[3] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 09-01-00014-а